L’APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA NEI CORSI DI INGEGNERIA, PRE E POST COVID-19

Vittoria Bonanzinga

Università Mediterranea di Reggio Calabria
vittoria.bonanzinga@unirc.it

— FULL PAPER —

ARGOMENTO*: Istruzione universitaria*

Abstract

Questo articolo presenta un percorso didattico progettato e sperimentato per l’insegnamento della Geometria in un corso di laurea in Ingegneria dell’Informazione dell’Università Mediterranea di Reggio Calabria negli anni accademici 2019-2020 e 2020-2021. Sono analizzati e confrontati i risultati ottenuti durante la pandemia di Covid-19 con quelli riscontrati nell’anno accademico precedente alla pandemia. La motivazione allo studio utilizzando piattaforme interattive con feedback immediati e la risoluzione di problemi legati alla vita reale sono stati i punti di forza delle strategie adoperate che hanno dato impulso ai casi di successo mentre tra le criticità si evidenziano la quantità di tempo necessaria per preparare le attività e la mancanza di un ambiente di calcolo evoluto per la costruzione di grafici e di feedback interattivi.

Keywords – Innovazione, tecnologia, e-learning, istruzione universitaria, valutazione, matematica, blended learning.

1 INTRODUZIONE

L’apprendimento della matematica a livello universitario è un fenomeno complesso che comprende aspetti cognitivi, affettivi e motivazionali. Una delle cause delle difficoltà nell’apprendimento della matematica in ambito universitario consiste nella presentazione della materia ai discenti attraverso la tradizionale sequenza deduttiva di definizione, teorema, dimostrazione, che non riflette la natura della costruzione della conoscenza matematica, che avviene “attraverso tentativi ed errori, attraverso affermazioni parzialmente corrette, attraverso formulazioni intuitive in cui sono stati intenzionalmente introdotti nuovi termini e imprecisioni, attraverso disegni che cercano di presentare visivamente parti delle strutture matematiche su cui si sta pensando, attraverso modifiche dinamiche apportate a questi disegni, ecc.”, come riportato in [5]. Numerosi studi e progetti in Italia e all’estero hanno lo scopo di prevenire l’abbandono nei primi anni di Ingegneria per le difficoltà incontrate nell’apprendimento della matematica, e in particolare tali studi si concentrano sulle strategie di apprendimento. Fra i vari studi condotti sull’argomento, i risultati illustrati da Griese in [9] riferiti al progetto *Mp*^{2}*-Math/plus* confermano l’importanza degli adattamenti delle procedure di insegnamento in cicli successivi, e sottolineano il valore dell’impegno e della motivazione degli studenti per il raggiungimento del successo nello studio. In Italia, il progetto *Osservatori abbandoni* di Cineca esplora le possibili applicazioni delle tecniche di analisi dati e Machine Learning, per monitorare le performance e le caratteristiche degli studenti che durante l’anno presentano un’alta probabilità di abbandono con l’obiettivo di limitare o prevenire il fenomeno. Le condizioni che supportano o ostacolano il successo accademico in matematica per gli studenti di ingegneria sono strettamente legate alle metodologie di insegnamento e naturalmente alla preparazione conseguita dallo studente negli studi scolastici. Rach nella sua tesi di dottorato [12] mette a confronto le caratteristiche dell’insegnamento della matematica a livello secondario con i metodi di insegnamento delle discipline matematiche a livello terziario. Si evidenzia che la matematica scolastica e la matematica universitaria hanno obiettivi diversi: mentre a scuola l'obiettivo è quello di educare in generale gli studenti e metterli in grado di risolvere problemi di testo con l'aiuto della matematica (in un mondo in cui i concetti possiedono una rappresentazione concreta, o almeno simbolica), all'università lo scopo è introdurre teorie matematiche in un mondo formale-assiomatico. La matematica universitaria è più rigorosa, più formale e più astratta, più lontana da esempi ed esperimenti. Numerosi studi evidenziano la necessità di motivare gli studenti allo studio della matematica presentando problemi legati alla vita reale e a problemi concreti, vedi [13] e [14]. La ricerca presentata in questo contributo ha lo scopo di indagare se le varie tecnologie informatiche, che si sono imposte in modo dirompente durante la pandemia Covid-19, possano favorire i processi di insegnamento e apprendimento della matematica, sia come supporto durante la lezione in presenza sia come strumento di consolidamento e potenziamento nello studio individuale. L'esperienza descritta in questo lavoro è stata ispirata dai seminari di Alberto Conte e Marina Marchisio tenuti all'Università di Messina, nel maggio 2017 e nel Dipartimento DIIES dell'Università di Reggio Calabria sui temi dell'innovazione nella didattica della matematica, dal convegno Didamatica 2019 tenuto presso il Dipartimento DIGIES dell'Università degli Studi di Reggio Calabria, dalla Summer School *Higher Education. Professionalità docente e innovazione didattica universitaria*, svoltasi a Reggio Calabria nel giugno 2019 e dal Convegno Aplimat 2020 svoltosi a Bratislava dal 2 al 4 febbraio 2020.

2 PIATTAFORME DI E-LEARNING NELL'UNIVERSITÀ DI REGGIO CALABRIA

Con il termine *e-learning* si intende l'utilizzo delle tecnologie multimediali e Internet per migliorare la qualità dell'apprendimento, facilitando l'accesso a risorse e servizi. Molte università in Italia utilizzano piattaforme istituzionali basate su Moodle, ovvero una piattaforma ben nota per creare un ambiente di apprendimento multimediale [10]. Tale piattaforma open source è uno strumento utile per la condivisione, la comunicazione e la collaborazione. Con tale strumento è possibile progettare corsi inserendo file, cartelle, URL, video. Si possono inoltre creare test con domande di diverso tipo: scelta multipla, vero/falso, numerico, risposta breve e risposta aperta. La valutazione dei test implementati sarà automatica e immediata, un vantaggio sia per i docenti che per gli studenti. In aggiunta si può integrare la piattaforma Moodle con altri software specifici per avere un ambiente più performante. Ad esempio, l'Università di Torino ha sviluppato un sistema di integrazione con il software matematico MAPLE, un ambiente di calcolo evoluto per il problem solving e posing [15]. L'accesso alle piattaforme è consentito, oltre che da PC anche da dispositivi mobili come laptop, tablet e smartphone. L'Università Mediterranea degli Studi di Reggio Calabria ha realizzato, nell'ambito del progetto *Innovazione Area dello Stretto*, la piattaforma e-learning per la gestione dei corsi di studio, utilizzando Moodle come Learning Management System. Dall'inizio del 2011, tale piattaforma è a disposizione dei docenti della Mediterranea che desiderano sperimentare il metodo e-learning nella propria metodologia didattica. Ad oggi sono disponibili quindici corsi, dei quali nove in area matematica, uno in area linguistica, due in area didattica, uno in area giuridica, uno in area agraria ed uno in area umanistica. Per la sperimentazione per il corso di Geometria, l'Università di Reggio Calabria offre due piattaforme: la prima disponibile all'indirizzo http://e-learning.unirc.it/ è la classica piattaforma per gestire gli argomenti del corso e le simulazioni dei quiz basata sulla versione Moodle 2.9; la seconda disponibile all'indirizzo http://eltest.unirc.it/ è attualmente in fase di testing, contiene la versione 3.2 di Moodle ed è usata principalmente per gli esami. Inoltre, da marzo 2020 con l'inizio della pandemia da Covid 19, l'Università Mediterranea di Reggio Calabria ha messo a disposizione di tutti i docenti, la piattaforma Microsoft Teams che è stata utilizzata per l'erogazione delle lezioni a distanza e in modalità blended.

3 STATO DELL'ARTE

In letteratura vi sono numerosi studi riguardanti pratiche didattiche innovative nei corsi di laurea in Ingegneria, Graham nel 2018 in [8] presenta una corposa ricerca di 170 pagine commissionata e sostenuta finanziariamente dal Massachusetts Institute of Tecnology (MIT), un progetto sullo stato dell'arte globale nella formazione ingegneristica che ha visto coinvolti studenti, facoltà, manager universitari, partner industriali, leader accademici, ricercatori nel campo della formazione, professionisti nell'insegnamento e nell'apprendimento, rappresentanti del governo nazionali di tutto il mondo che hanno condiviso esperienze, conoscenze e competenze. Gli enormi cambiamenti nella formazione degli ingegneri negli ultimi dieci anni hanno influenzato anche la formazione matematica nei corsi di Ingegneria. Molte università di Ingegneria riportano un alto tasso di abbandono in matematica, che ha spinto i dipartimenti universitari ad offrire corsi di transizione, per colmare il passaggio dalla matematica scolastica all'università, o corsi di servizio per la comprensione di alcuni argomenti specifici. Inoltre, lo sviluppo della tecnologia e delle risorse digitali ha portato a nuove possibilità per i corsi di ingegneria in cui problemi matematicamente complessi vengono risolti con il supporto del computer, e le visualizzazioni e le simulazioni giocano un ruolo centrale [6] e [11]. Questi sviluppi hanno anche cambiato le condizioni per l'insegnamento e l'apprendimento. Le nuove tecnologie consentono di modellizzare e risolvere in particolare problemi ingegneristici anche di notevole complessità con simulazioni virtuali sempre più realistiche. L'apprendimento attivo degli studenti su compiti legati alla vita reale e l'autoregolamentazione su percorsi individualizzati di apprendimento caratterizzano le pratiche innovative introdotte in diversi atenei. Anche i metodi di valutazione sono cambiati, per includere pratiche più formative e cicli di feedback iterativi.

4 APPLICAZIONE NELLA VITA REALE DI PROBLEMI DI ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

Tra gli elementi innovativi delle metodologie didattiche utilizzate vi è la contestualizzazione nella vita reale di problemi di algebra lineare e geometria, vedi [13] e [14]. Si presentano alcuni esempi.

4.1 Esempio 1

Un'azienda ha due magazzini con arance, bergamotti e peperoncini, nel primo magazzino c'è una tonnellata di arance, due di bergamotti ed una tonnellata e mezzo di peperoncini, mentre nel secondo magazzino ci sono tre tonnellate di bergamotti e una tonnellata di peperoncini. Il prezzo delle arance è di 1.000 euro per una tonnellata. Il prezzo dei bergamotti è di 2.000 euro alla tonnellata. Il prezzo dei peperoncini è di 5.000 euro alla tonnellata.

Descriviamo la situazione con la seguente Tab. 1, con le quantità espresse in tonnellate:

	Arance	Bergamotti	Peperoncini
Magazzino 1	1	2	1,5
Magazzino 2	0	3	1

Tabella 1 – Merce contenuta nei magazzini

Qual è il valore in euro di ciascun magazzino?

La risposta si può ottenere risolvendo il seguente prodotto matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1{,}5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 5000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 + 4000 + 7500 \\ 6000 + 5000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12500 \\ 11000 \end{pmatrix}$$

Per cui il primo magazzino ha un valore di 12500 euro, il secondo ha un valore di 11000 euro.

4.2 Esempio 2

Figura 1 - Abbigliamento e accessori di moda

Un imprenditore investe ogni anno una somma di denaro nella sua azienda di moda. Predice che il denaro investito per produrre gli accessori (ramo A) frutterà il doppio, il denaro investito per produrre abbigliamento (ramo B) renderà il triplo ed invece il denaro destinato alla pubblicità (ramo C) si dimezzerà, per il bonus pubblicitario che permette di recuperare il 50% come credito d'imposta. Per non esaurire le risorse destinate alla pubblicità annuale (ramo C), è necessario ogni anno utilizzare i guadagni procurati dagli altri rami, ogni euro guadagnato è distribuito equamente tra i tre rami di attività. Alla fine dell'anno si desidera una distribuzione proporzionale a quella iniziale.

Vogliamo sapere come sarà la situazione tra un anno se inizialmente si investono 10.000 euro. Siano *x*,*y*,*z* le somme di denaro investite nei tre rami di attività:

$$\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{dopo\ un\ anno} \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \\ \frac{z}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x \\ y+2y \\ \frac{z}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{ridistribuzione} \begin{pmatrix} x+\frac{x}{3}+\frac{2}{3}y \\ y+\frac{x}{3}+\frac{2}{3}y \\ \frac{z}{2}+\frac{x}{3}+\frac{2}{3}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}x+\frac{2}{3}y \\ \frac{x}{3}+\frac{5}{3}y \\ \frac{x}{3}+\frac{2}{3}y+\frac{z}{2} \end{pmatrix}.$$

Quindi la trasformazione dell'investimento dopo un anno è data dall'applicazione lineare:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, con\ f(x,y,z) = \left(\tfrac{4}{3}x+\tfrac{2}{3}y, \tfrac{1}{3}x+\tfrac{5}{3}y, \tfrac{1}{3}x+\tfrac{2}{3}y+\tfrac{z}{2}\right).$$

Sia $M = M_{CC}(f) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Sia *X* il vettore della distribuzione iniziale, vorremmo che la distribuzione iniziale dopo un anno sia del tipo λX, così cerchiamo gli autovalori e gli autovettori di *M*. Il polinomio caratteristico è $det \begin{pmatrix} \frac{4}{3}-\lambda & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3}-\lambda & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)(\lambda^2-3\lambda+2)$.

L'autospazio relativo a $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ è $V_{\lambda_1} = \{(0,0,t): t \in \mathbb{R}\}$.

L'autospazio relativo a $\lambda_2 = 1$ è $V_{\lambda_2} = \left\{\left(x, -\frac{1}{2}x, 0\right): x \in \mathbb{R}\right\}$.

L'autospazio relativo a $\lambda_3 = 2$ è $V_{\lambda_3} = \left\{\left(y, y, \frac{2}{3}y\right): y \in \mathbb{R}\right\}$.

Ora interpretiamo i risultati alla luce del nostro problema. L'autovalore $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ con l'autovettore (0,0,10.000) fornisce una possibile soluzione al nostro problema: investendo tutti i 10.000 euro in pubblicità, ma questa non sarebbe una scelta saggia, perché ogni anno l'investimento si dimezzerebbe. L'autovalore $\lambda_2 = 1$ non dà alcuna soluzione al nostro problema, in quanto gli autovettori (-2y,y,0) non hanno interesse perché non possiamo investire una quantità negativa di denaro. Consideriamo l'autovalore $\lambda_3 = 2$ con l'autovettore $\left(x, x, \frac{2}{3}x\right)$. Se investiamo 10.000 euro, allora $x + x + \frac{2}{3}x = 10.000$ euro, da cui si ricava x=3.750 euro e $\frac{2}{3}x = 2.500$ euro. Così la soluzione ottimale consiste nell'investire 3.750 euro rispettivamente nei rami A, accessori e B abbigliamento e 2.500 euro nel ramo C pubblicità, dopo un anno la quantità di denaro sarà raddoppiata e avremo 7.500 euro nei rami A e B, mentre 5.000 euro nel ramo C.

4.3 Esempio 3

Nell'ambito della computer grafica si utilizzano frequentemente le seguenti trasformazioni 2D: traslazioni, rotazioni, ridimensionamento (*scaling*) e riflessioni. Dato il quadrilatero ABCD ottenuto congiungendo i punti A(1;1), B(2;3), C(4;3) e D(5;1) descrivere la trasformazione della figura ABCD considerando la traslazione della figura data con un vettore di componenti (3,2), e la rotazione della figura data di un angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$. Descrivere tali trasformazioni e rappresentare le figure sopra descritte. Rappresentiamo il quadrilatero ABCD su un piano xy:

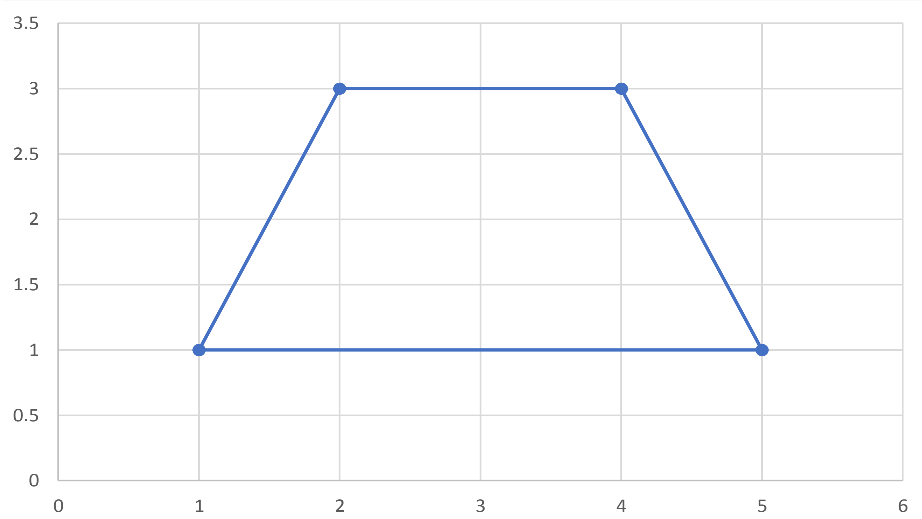


Figura 2 - Quadrilatero ABCD

Le componenti vettoriali di questo quadrilatero sono quindi v_1=(1,1), v_2=(2,3), v_3=(4,3) e v_4=(5,1). Una traslazione è un'isometria, ossia una trasformazione geometrica che lascia invariate le distanze spostando tutti i punti di una distanza fissata nella medesima direzione. La traslazione T_V è l'applicazione $T_V: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e quindi:

$$T_V\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+p \\ y+q \end{pmatrix}.$$

dove p e q sono le componenti del vettore traslazione. Se p=3 e q=2 allora applicando la traslazione ai vettori v_1=(1,1), v_2=(2,3), v_3=(4,3) e v_4=(5,1) si ottengono rispettivamente i vettori di componenti: (4,3), (5,5), (7,5) e (8,3) illustrati in Figura 3 - Quadrilatero ABCD e sua traslazione

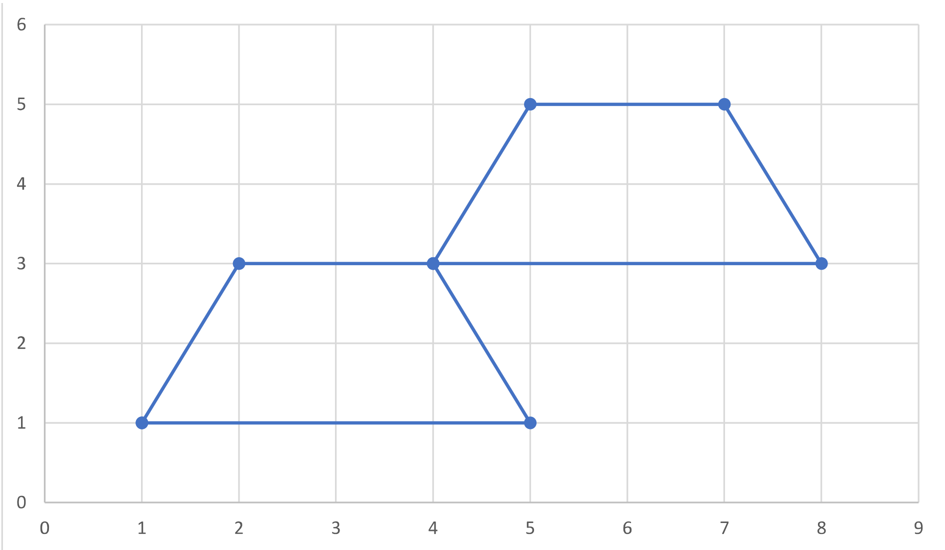


Figura 3 - Quadrilatero ABCD e sua traslazione

La rotazione nel piano è un'applicazione di $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ descritta dalla seguente funzione:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{cos\theta} & \boldsymbol{-sin\theta} \\ \boldsymbol{sin\theta} & \boldsymbol{cos\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$$

Se $\theta = \frac{\pi}{2}$, allora applicando la rotazione ai vettori v_1=(1,1), v_2=(2,3), v_3=(4,3) e v_4=(5,1) si ottengono rispettivamente i vettori di componenti: (-1,1), (-3,2), (-3,4) e (-1,5) descritti nella figura seguente:

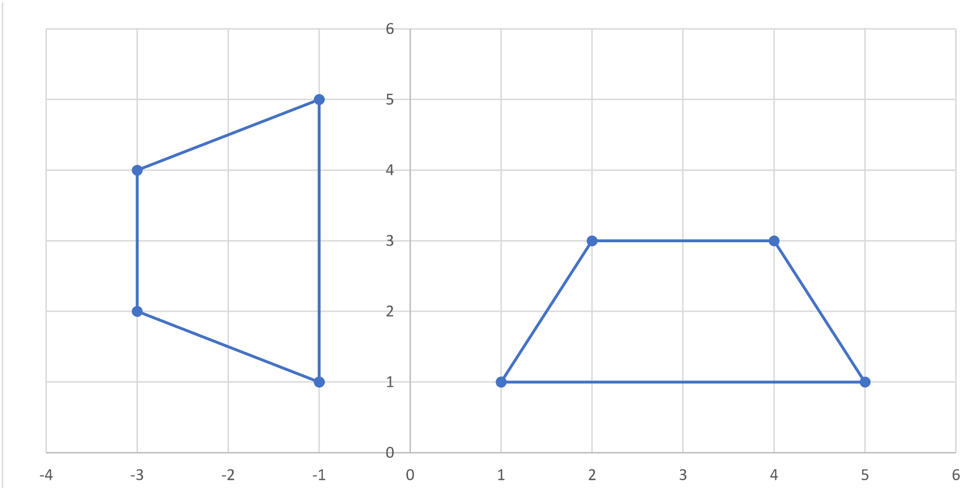


Figura 4 - Quadrilatero ABCD e sua rotazione

5 PROGETTAZIONE

Le metodologie di apprendimento tramite piattaforma e-learning, prima di essere applicate ai corsi di *Geometria* per Ingegneria, sono state sperimentate con successo dall’autore nel corso di *Fondamenti di matematica per la formazione di base* del Corso di laurea magistrale in Scienze della Formazione Primaria nel I semestre dell’anno accademico 2019/2020, come riportato in [3]. Il presente progetto educativo, relativo all’insegnamento della *Geometria* per gli studenti di Ingegneria dell’Informazione, è stato organizzato in tre fasi. La prima fase è dedicata al modello didattico attraverso la scelta delle tecnologie da adottare nel progetto e la definizione della metodologia della valutazione. La seconda fase è relativa alla parte attuativa, all’inserimento di risorse con i contenuti del corso, alla creazione di un deposito di domande divise per argomenti e per obiettivi, allo svolgimento di attività per mettere in pratica le conoscenze acquisite e consolidare le competenze, come la somministrazione di test con valutazione formativa, l’assegnazione di progetti di gruppo e compiti individuali. Infine la terza fase riguarda l’analisi delle due fasi precedenti e consente la restituzione di buone pratiche in cui vengono evidenziati i punti di forza e di debolezza nell’utilizzo di queste tecnologie nelle diverse esperienze didattiche.

Nella prima fase del progetto si sono formulati gli obiettivi da raggiungere secondo il modello “S.M.A.R.T.” ideato da G. T. Doran e pubblicato nel numero di novembre 1981 della rivista Management Review [4]. Con la sigla S.M.A.R.T. si indicano quali sono le caratteristiche degli obiettivi da perseguire:

- **S**pecifici: i risultati non devono essere troppo generici
- **M**isurabili: i risultati devono poter essere misurati, è dunque necessario ideare metodi per quantificare i progressi
- r**A**ggiugibili: i risultati devono poter essere raggiunti
- **R**ilevanti: i risultati voluti devono essere attinenti al corso
- **T**emporalmente limitati: deve essere chiaro in quanto tempo gli obiettivi devono essere raggiunti.

Per quanto riguarda la definizione dei risultati dell’apprendimento seguiamo la tassonomia di Bloom, rivista da Anderson, Krathwohl, Airasian, Cruikshank, Mayer, Pintrich, Raths, e Wittrock nel 2001, che prevede un elenco di sei categorie di competenze, in ordine crescente dalle più semplici alle più complesse,

1. Conoscenza: capacità di memorizzare informazioni;
2. Comprensione: essere in grado di tradurre e interpretare le informazioni memorizzate;
3. Applicazione: saper estendere i concetti acquisiti a situazioni inconsuete;
4. Analisi: capacità di distinguere elementi dell’informazione e separare qualitativamente i dati;
5. Sintesi: organizzare efficacemente i contenuti acquisiti
6. Valutazione: esaminare criticamente una situazione

vedi [1].

6 ESPERIENZE E RISULTATI

Nella seconda fase del progetto educativo sono state predisposte delle verifiche in itinere, quiz secondo il modello di valutazione formativa automatica su:

- Prerequisiti e strutture algebriche
- Lineare indipendenza e basi
- Matrici, rango, matrici simmetriche, antisimmetriche, diagonali, triangolari, prodotto tra matrici
- Autovalori e autovettori
- Geometria analitica del piano e dello spazio.

Si è data inoltre la possibilità di ripetere alcuni quiz senza limitazioni; i tentativi multipli ed i feedback immediati forniti, hanno permesso agli studenti di riconoscere gli errori e di soffermarsi su di essi per poter rivedere il proprio processo formativo e al docente il monitoraggio della partecipazione e dell’apprendimento. Le domande a risposta aperta sono state assegnate per attivare diversi processi cognitivi.

Sono stati inoltre assegnati dei progetti di gruppo per applicare in un contesto reale a loro familiare le conoscenze acquisite dell’algebra lineare.

Il numero di destinatari complessivi del progetto educativo nei due anni accademici 2019/2020 e 2020/2021 è stato di duecentoquindici unità, i partecipanti attivi sono stati complessivamente centosessantotto, suddivisi in ottantasette nell’anno accademico 2019/2020 e in ottantuno nell’anno accademico 2020/2021.

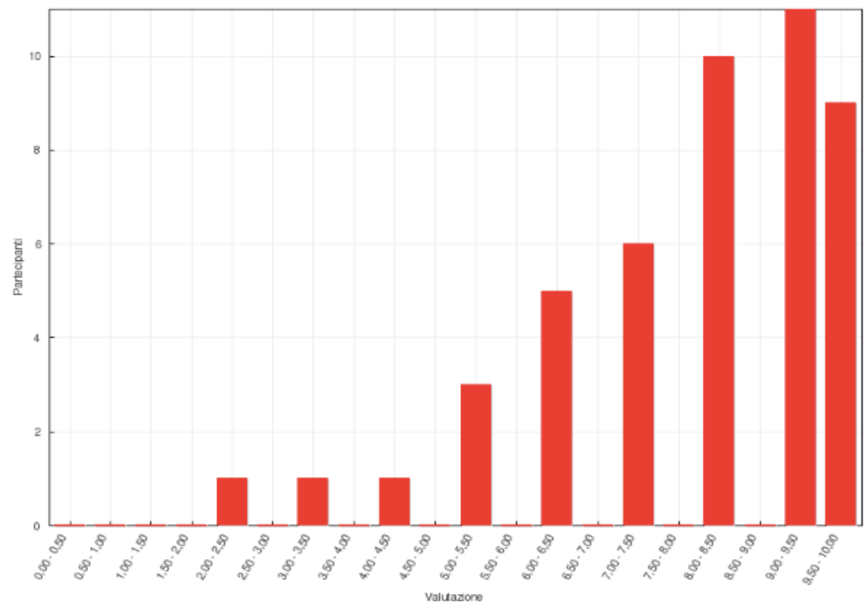
Nell’anno accademico 2019/2020 sono stati predisposti utilizzando la piattaforma e-learning di ateneo cinque test sugli argomenti disciplinari sopra menzionati, [7]. Il primo quiz è stato svolto in presenza il 26 febbraio 2020 durante la lezione con la partecipazione di settantuno studenti, mentre altri sei studenti hanno potuto effettuare la prova in una data successiva. Le successive prove di verifica in itinere si sono svolte a distanza a causa del lockdown. Settantasette studenti hanno completato il primo quiz. Al secondo quiz svoltosi a distanza il 12 marzo 2020, hanno partecipato sessantaquattro studenti. Il terzo quiz si è svolto il 18 marzo 2020 e cinquantacinque studenti hanno svolto in maniera sincrona la prova. Mentre diciassette studenti hanno svolto la prova in maniera asincrona in date successive. Hanno completato la prova sessantaquattro studenti. Il quarto quiz si è svolto il 29 aprile 2020 ed hanno partecipato in maniera sincrona sessantasei studenti completando la prova, mentre cinque studenti hanno svolto la prova in modalità asincrona. Il quinto quiz si è svolto in modalità sincrona il 28 maggio 2020 con la partecipazione di cinquantanove studenti, mentre quattro studenti hanno svolto la prova in modalità asincrona in una data successiva, il primo giugno 2020. Quattro delle verifiche preparate nell’anno accademico 2019/2020 sono state riutilizzate nell’anno accademico 2020/2021 come test di allenamento.

Nell’anno accademico 2019/2020 è stato assegnato un progetto di gruppo sul prodotto tra matrici con valutazione manuale. Il progetto riguardava la contestualizzazione di un problema reale risolubile con un prodotto tra matrici. Il progetto si realizzava in quattro fasi.

Nella prima si richiedeva di formare gruppi di cinque persone delle quali quattro partecipanti alla lezione del 19 marzo 2020 ed uno era assente alla spiegazione del progetto. I gruppi si sono organizzati utilizzando le chat di *Microsoft Teams* o il forum di *Moodle*.

Nella seconda fase i gruppi sono stati invitati alla formalizzazione del problema proposto ed alla sua risoluzione. Nella terza fase gli studenti formanti un gruppo sono stati invitati ad inviare il loro progetto ad un altro gruppo per la valutazione sulla chiarezza dell’esposizione del problema e sulla correttezza dello svolgimento. Nella quarta fase ogni gruppo doveva valutare un altro gruppo. Al termine delle quattro fasi ogni gruppo ha inserito nella piattaforma il lavoro svolto insieme con le valutazioni. Sulla piattaforma *Moodle* si osservano ottantuno consegne, in quanto alcuni studenti non avevano completato il lavoro assegnato o non avevano compreso la traccia del problema assegnato. Alcuni progetti sono stati oggetto di revisione in quanto mancava l’applicazione nella vita reale del prodotto tra matrici, o la valutazione da parte di un altro gruppo o l’applicazione alla vita reale conteneva elementi poco realistici. Al termine di tutte le revisioni ottanta studenti hanno partecipato ai progetti di gruppo ed hanno consegnato un lavoro corretto e completo. Si sono formati diciassette gruppi, tredici con cinque partecipanti denominati *Matri(x)*, *30 e lode*, *5π*, *Team Nova*, *The Eagles*, *aMATRICIani*, *Omega*, *Gruppo abeliano della sigma algebra*, *Geometry Team*, *Hakuna Matata*, *Santa Pace*, *#ifacimupezza*, tre con quattro partecipanti: *FAFS* dall’inglese finanziamenti per l’acquisto di automobili per concessionarie o semplicemente con le iniziali dei nomi dei partecipanti al progetto, *Poker d’assi*, *Gli ultimi saranno i primi*, ed un gruppo denominato *5^A SIA* con tre partecipanti.

I problemi matematici affrontati dagli studenti nei progetti erano molto semplici, ma sono stati realizzati con originalità ed hanno favorito la socialità e la collaborazione. La valutazione tra pari ha permesso l’interazione tra i gruppi ed un confronto costruttivo. Si presentano alcuni ambiti di applicazione del prodotto tra matrici. Il primo ambito di applicazione riguarda la nutrizione e la crescita muscolare. Un gruppo di esperti dell'alimentazione conduce uno studio sulla crescita muscolare di un campione di atleti di giovane età. A tal fine decide di combinare una serie di alimenti dalle note proprietà antiossidanti (noci, mandorle, anacardi) per valutarne l'efficacia nel promuovere la risposta ipertrofica. Vengono create tre miscele: A, B e C. Il team si avvale di matrici, e del prodotto fra matrici, per ottenere informazioni quantitative sui valori nutrizionali di ciascuna mistura. Una seconda applicazione del prodotto tra matrici riguarda la promozione di un addetto marketing in base alle vendite di diversi prodotti. Una terza applicazione riguarda il costo di un’auto tenendo conto delle rate mensili e del rispettivo valore del TAEG, tasso di interesse. Una quarta applicazione riguarda il guadagno ricavato dalle vendite del videogioco GTA5 nei prime sei mesi del suo lancio nelle differenti piattaforme Playstation, Xbox e PC. Una quinta applicazione riguarda la ricerca del film Disney che ha prodotto più incassi tra “Il Re Leone”, “La Bella e la Bestia” e “Aladdin” tenendo conto del prezzo medio del biglietto del cartone animato e del live action. Una sesta applicazione riguarda il guadagno complessivo dei campioni olimpici di Rio 2016 degli atleti statunitensi, degli atleti inglesi e degli atleti cinesi, in base al numero di medaglie conseguite e alle ricompense per ogni medaglia d’oro, d’argento e di bronzo. Un’altra applicazione riguarda il guadagno di due centri linguistici che erogano corsi in inglese, spagnolo, francese e tedesco, tenendo conto della retta mensile di ciascun corso e del numero di partecipanti di ciascun corso. Nell’anno accademico 2020/2021 gli studenti nel II semestre inizialmente seguono le lezioni a distanza, solo dal 4 maggio 2021 hanno la possibilità di seguire le lezioni in presenza, ma solo ventidue studenti partecipano alle lezioni in presenza, mentre diciannove seguono le lezioni a distanza. La prima verifica sui prerequisiti e le strutture algebriche è stata svolta l’11 marzo 2021 ed hanno partecipato sessantacinque studenti che hanno completato e consegnato la prova con una valutazione media di 8,52/10, la seconda verifica sulla lineare indipendenza e le basi si è svolta il 18 marzo 2021 ed hanno partecipato cinquantotto studenti con una valutazione media di 7,60, alla terza verifica sulle matrici svoltasi il 25 marzo hanno partecipato cinquantasei studenti, hanno completato la prova cinquantacinque studenti con una media di 8,65, alla quarta verifica su autovalori e autovettori hanno partecipato quarantanove studenti con una media di 7,71, alla quinta verifica sulla geometria analitica del piano e dello spazio hanno partecipato quarantasette studenti con una media di 7,77. Si evince dalla media delle valutazioni e dal report della seconda prova in itinere mostrato in Fig. 5



che l’apprendimento dei concetti fondamentali sulla lineare indipendenza e sulle basi è stato più difficoltoso.

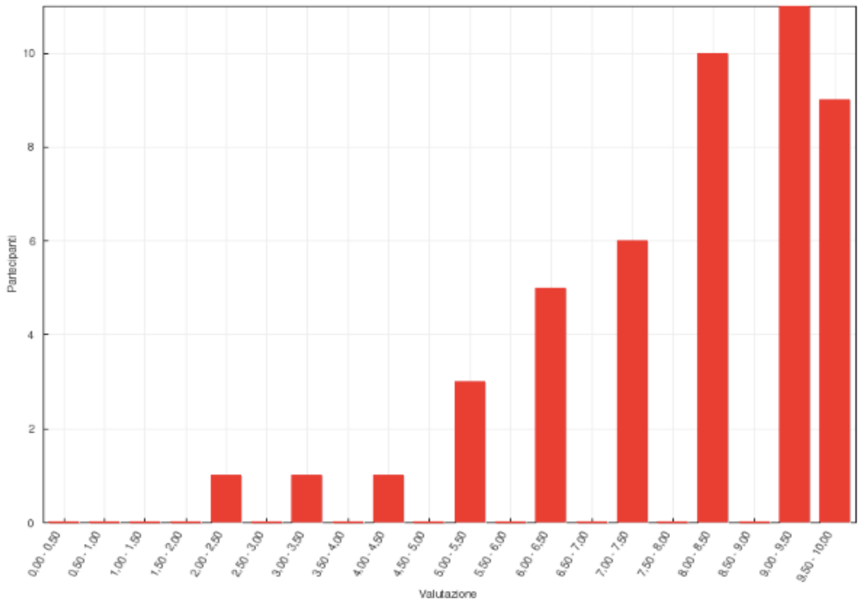


Figura 5 - Numero complessivo di studenti raggruppati per intervallo di valutazione

Le verifiche sulla piattaforma Moodle, la partecipazione ai progetti, le consegne individuali e le prove d’esame orali hanno consentito a settantuno studenti nell’anno accademico 2019/2020 il superamento dell’esame di Geometria negli appelli da giugno a dicembre 2020. Nell’anno accademico 2018/2019 negli appelli da giugno a dicembre 2019, cinquantuno studenti hanno superato l’esame di Geometria con una prova scritta ed una prova orale. Si evince pertanto un notevole incremento di studenti che hanno superato l’esame di Geometria nel primo anno di sperimentazione. Il numero di esami sostenuti nel II semestre del successivo anno accademico 2020/2021 è stato significativamente inferiore rispetto ai due anni precedenti, circostanza probabilmente causata da una carente preparazione scolastica dovuta alla didattica forzatamente a distanza durante l’emergenza del lockdown. Un altro fattore che può aver causato il minore numero di esami sostenuti può essere individuato nella difficoltà di riadattamento da parte degli studenti agli esami in presenza. Il numero complessivo degli studenti che superano l’esame di Geometria nell’anno accademico 2020-2021 negli appelli da giugno a settembre è quarantadue, numero che riflette la frequenza degli studenti in presenza e distanza fino alla fine del corso. I dati numerici relativi al superamento dell’esame di Geometria negli anni accademici 2018-2019, 2019-2020, 2020-2021 inducono a pensare che le lezioni in presenza siano più efficaci di quelle a distanza. Di contro le lezioni da remoto presentano un maggior rischio di distrazione, che potrebbe comportare nei casi estremi anche l’abbandono degli studi.

7 CONCLUSIONI E SVILUPPI FUTURI

L’analisi delle opinioni degli studenti, tramite i questionari sulla qualità della didattica erogata nell’anno accademico 2019-2020, evidenzia un notevole apprezzamento delle metodologie utilizzate. I successi ottenuti dagli studenti nel superamento degli esami evidenziano come sia efficace l’utilizzo delle tecnologie digitali come supporto alla didattica tradizionale e non con funzione sostitutiva. Per stimolare e supportare gli studenti nel processo di apprendimento al fine di diminuire la percentuale di abbandoni e garantire il raggiungimento del successo formativo è fondamentale una buona progettazione didattica nella quale la motivazione gioca un ruolo chiave. Gli studenti, infatti, spesso riscontrano difficoltà nell’apprendimento della matematica perché astratta e incomprensibile. La contestualizzazione di problemi reali risolubili con l’utilizzo dell’algebra lineare è stata un elemento basilare per incrementare l’interesse e la motivazione. Il modello di valutazione formativa automatica utilizzato ha fornito feedback a studenti ed insegnanti che ha inciso positivamente su apprendimento ed insegnamento, vedi [2]. L’utilizzo di un ambiente virtuale di apprendimento ha favorito interattività con i materiali didattici, i docenti, i tutor e con gli altri studenti. La progettazione didattica ha richiesto un notevole impegno in termini di ore e di capitale umano, è necessario investire risorse per un maggiore coinvolgimento dei docenti e nell’utilizzo di ambienti di apprendimento che utilizzano il calcolo evoluto per la costruzione di grafici ed animazioni, di feedback interattivi e permettano agli studenti di fare progressi nel processo di apprendimento della matematica. La pandemia ha dato un notevole impulso all’utilizzo delle tecnologie informatiche per la formazione a distanza, certamente il know-how acquisito dai docenti potrà essere utilizzato in futuro per allievi con disabilità, che attraverso la formazione da remoto, possono trovare un modello educativo più adatto alle loro speciali esigenze o per attività formative che non necessitano la presenza, o per persone che avrebbero benefici dalla formazione a distanza in termini di risparmio di tempo o per la flessibilità della fruizione di corsi in orari più confacenti alle proprie esigenze.

Riferimenti bibliografici

[1] Anderson L.W., Krathwohl D. R., Airasian P. W., Cruikshank K. A., Mayer R. E., Pintrich P. R., Raths J., and Wittrock M. C., A taxonomy for learning, teaching, and assessing. A revision of Bloom’s taxonomy of educational objectives, New York, Addison Wesley Longman, (2001).

[2] Barana A., Marchisio M., Rabellino S., Automated Assessment in Mathematics, IEEE 39th Annual Computer Software and Applications Conference (COMPSAC), (2015), pp. 670-671.

[3] Bonanzinga V., Cisto C., Miceli E., Blended learning: an experience with use of mobile devices for the course `Fundamentals of Mathematics for Basic Education, 19th Conference on Applied Mathematics, Aplimat 2020, Proceedings, (2020), pp. 119 -125

[4] Doran G. T., There’s a S.M.A.R.T. Way to Write Management Goals and Objectives, Management Review (AMA Forum), November 1981, pp. 35-36

[5] Dreyfus T., Advanced mathematical thinking processes, In D. O. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking Vol. 11, Dordrecht and Boston: Kluwer Academic Publishers,(1991), pp. 25–41.

[6] Enelund M., Larsson S., Malmquist J., Integration of a computational mathematics education in the mechanical engineering curriculum Proceedings of the 7th international CDIO conference. Technical University of Denmark, Copenhagen, June 20-23, 2011.

[7] Generating Moodle quizzes via LaTeX, https://ctan.org/pkg/moodle

[8] Graham R., The global state of art in engineering education, 2018, MIT, pp.1-170.

[9] Griese B., Learning Strategies in Engineering Mathematics, book, Springer, 2017.

[10] https://moodle.org/

[11] Pepin B., Biehler R., Gueudet G., Mathematics in Engineering Education: a review of the recent literature with a view towards innovative practices, International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, (2021), 7, pp. 163-188.

[12] Rach S., Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium, Dissertation, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2014.

[13] Yilmaz F., Mierlus Mazilu I., Some practical applications of matrices and determinants in real life, 19th Conference on Applied Mathematics, Aplimat 2020, Proceedings, (2020), pp. 814-823.

[14] Yilmaz F., Mierlus Mazilu I., Rasteiro D., Solving Real Life Problems Using Matrices And Determinants, 19th Conference on Applied Mathematics, Aplimat 2020, Proceedings, (2020), pp 1131-1139.

[15] Zich R., Pardini C., Marchisio M., Moodle&Maple: una struttura integrata al servizio del Progetto MIUR su Problem Posing and Solving (PP&S), G. Fiorentino (Ed.) - Atti del MoodleMoot Italia, Accademia Navale di Livorno, 2012, pp. 1-10.